

問題 1.

計算量クラスに関する以下の問に答えよ。

- (1) 1 テープの決定性 Turing 機械の定義を与えよ。
- (2) $NP \subseteq PSPACE$ を示せ。
- (3) $PSPACE \subseteq EXPTIME$ を示せ。
- (4) NP 完全問題の定義を述べ、その意義を簡単にまとめよ。

問題 2. 品物 i のサイズ $s_i (> 0)$, 利得度 $v_i (> 0)$ ($i = 1, \dots, n$) とナップザックの容量 B を入力とするナップザック問題のインスタンス I に対して、その最適解値 $OPT(I)$ は

$$OPT(I) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n v_i x_i \mid \sum_{i=1}^n s_i x_i \leq B, x_i = 0 \text{ or } 1 \ (i = 1, \dots, n) \right\}$$

で与えられる。

- (1) パラメタ K を用いて、この問題の判定版を書け。
- (2) その判定版が NP 完全であることを示せ。問題 PARTITION (n 個の正整数が与えられたとき、その 2 分割でそれぞれの和が等しくできるものがあるか判定する問題) の NP 完全性を用いてよい。

問題 3.

問題 2 のナップザック問題で、 $V = \max\{v_i \mid i = 1, \dots, n\}$, $S = \max\{s_i \mid i = 1, \dots, n\}$ とする。

- (1) この問題に対する擬多項式時間アルゴリズムとは、どのような条件を満たすものか?
- (2) ナップザック問題に対する擬多項式時間アルゴリズムを、動的計画法を用いて与えよ。アルゴリズムの正当性を示し、計算量を評価すること。

問題 4.

問題 2 のナップザック問題に対して、次の線形計画問題を考える。

$$LP(I) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n v_i x_i \mid \sum_{i=1}^n s_i x_i \leq B, 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, \dots, n) \right\}$$

以下の問に答えよ。

- (1) 線形計画問題 $LP(I)$ の最適解を与える多項式時間アルゴリズムを与えよ。
- (2) $LP(I)$ と $OPT(I)$ の関係について述べよ。
- (3) 上の (1) で与えた解から、 $OPT(I)$ の上界で、 $LP(I)$, v_i を用いたよい上界を与えよ。
- (4) 上の (1) で与えた解に対し、その小数点未満を切り捨てて整数化した解を元のナップザック問題に対する近似解とする近似アルゴリズム G を考え、その解の値を $G(I)$ とする。問題 3 の V に対して、 $G(I) \geq V$ であるとき、この近似アルゴリズム G の近似値比を求めよ。
- (5) 多項式時間近似スキーム (Polynomial-Time Approximation Scheme; PTAS) の定義を述べ、ナップザック問題に対する PTAS について議論せよ。

問題 5.

(1) 問題 2 のナップザック問題判定版に関して、与えられた K に対して答えが Yes のときその条件を満たす解を 1 つ出力し、No の場合は単に No というオラクル O を考える。このオラクル O を用いて、元の最適化問題のナップザック問題を解く計算量について論じよ。

(2) 上の (1) のように NP 完全問題を解くオラクル (NP オラクルと呼ぶ) を考え、それを用いて多項式時間で解ける問題のクラスを P^{NP} とする。 $P^{NP} \subseteq PSPACE$ であることを示せ。