離散数学試験問題

2012-07-18
担当：今井浩

問題 1.

(1) 平面に枝交差なく描かれた平面グラフ G で、点数 n, 枝数 m, 面数 f であるとき、その Euler の公式を書け（証明は不要）。特に、G が木の場合はどうなっているか？

(2) $K_{2,3}$ が平面グラフであることを示し、その双対グラフを求めよ。

(3) $K_{3,3}$ は平面グラフでないことを示せ。

(4) K_5 に 1 点新たに加え、それを元の 5 点のうちの 3 点と結んで得られるグラフは、$K_{3,3}$ を部分グラフとして含むか。

問題 2.

$\max\{\, x_1 + 2x_2 \mid x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 2,\ x_1, x_2 \geq 0 \,\}$ なる線形計画問題について、以下の問に答えよ。

(1) 標準形に変換せよ。

(2) 元の問題での原点に対応する解からスタートして、単体法により最適解が得られる過程を示せ。ピボットの選び方に任意性がある場合は、それぞれを選んだ場合の過程を示せ。

(3) $\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0\}$ の双対問題が、$\min\{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \mid A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y} \geq 0\}$ で与えられることを示せ。

(4) 元の問題の主問題・双対問題それぞれの最適解の対について、相補性条件が成立していることを記述せよ。

問題 3.

$$\max \sum_{i=1}^{6} x_i$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 1,\ x_2 + x_3 \leq 1,\ x_3 + x_4 \leq 1,\ x_4 + x_5 \leq 1,\ x_1 + x_5 \leq 1,\ x_1 + x_6 \leq 1,\ x_i \geq 0$$

を考える。

(1) 最適解を求め、それが最適解であることの証明とともに記述せよ。

(2) 最大にする目的関数が、$x_6 + 10\sum_{i=1}^{5} x_i$ である場合の最適解を求め、それが最適解であることの証明とともに記述せよ。

(3) 上の (2) の目的関数の問題で、制約条件に $\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 2$ という条件を加えたものの最適解はどうなるか？

(4) 目的関数をさらに変えることを考え、それについて perfect graph の観点から論じよ。

問題 4.

左点集合 U, 右点集合 W, 枝集合 E の 2 部グラフ $(U, W; E)$ を考える。$X \subset U$ に対して、$\gamma\colon 2^U \to \mathbf{Z}$ を $\gamma(X) = |\{w \mid (u,w) \in E,\ u \in X\}|$ で定める。

(1) $\gamma(X) + \gamma(Y) \geq \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ $(X, Y \subseteq U)$ を示せ。

(2) $\rho\colon 2^U \to \mathbf{Z}$ を、$\rho(X) = \min\{\gamma(S) + |X - S| \mid S \subseteq X\}$ $(X \subseteq U)$ で定める。$\rho(U)$ の値はこの 2 部グラフの何を表すか？

(3) (U, ρ) がマトロイドであることを示せ。

(4) このマトロイドの独立集合はどのようなものか？