離散数学試験問題

2011-09-20
担当：今井浩

問題 1.

$6n \leq 4n - 2|E|$

n 点からなる単純・連結な平面グラフ G を考える。

$3n \leq |E|$

(1) G に関して成り立つ Euler の公式を書け（証明は不要)。

(2) G には次数が 5 以下の点が存在することを示せ。

$|E|$

(3) G が 6 色で彩色可能であることを示せ。

問題 2.

左点集合 U, 右点集合 V, 枝集合 E の 2 部グラフ $(U, V; E)$ を考える。U の各点 u に整数の供給量 supply(u) が与えられ、W の各点に整数の需要量 demand(w) が与えられ、総供給量と総需要量は等しいとする。さらに枝 $e = (u, w)$ に対して単位量を点 u から点 w に輸送したときにかかる費用 $w(e)$ が与えられている。

(1) このとき、需給関係を満たす輸送の方法で、総費用が最小となる問題を、式によって表せ。

(2) 需給関係を満たす輸送の方法が存在しない場合、存在しないことを示す多項式時間の方法を与えよ。

(3) demand$(u) = 1$ $(u \in U)$, supply$(w) = \overset{1}{\cancel{0}}$ $(w \in W)$ のとき (このとき $|U| = |W|$)、この問題を解く多項式時間アルゴリズムを与えよ。

(4) demand, supply が一般の場合のアルゴリズムの計算量はどうなるか?

問題 3.

$\max\{\, 2x_1 + x_2 \mid x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 1,\ x_1 + 2x_2 \leqq 3,\ x_1, x_2 \geq 0 \,\}$ なる線形計画問題について、以下の問に答えよ。

(1) 標準形に変換せよ。

(2) 元の問題での原点に対応する解からスタートして、単体法により最適解が得られる過程を示せ。ピボットの選び方に任意性がある場合は、それぞれを選んだ場合の過程を示せ。

(3) この問題の双対問題を記述し、その最適解を与えよ。

(4) 主問題・双対問題それぞれの最適解の対について、相補性条件が成立していることを記述せよ。

問題 4. 要素が 0,1 からなる $n \times n$ 行列 A で、各行の 1 が連続して現れているとする。

(1) totally unimodular の定義を述べよ。

(1) この行列 A は totally unimodular か?

(2) A の各行を点で表し、2 つの行が同じ列に 1 をもつとき対応する 2 点を枝で結ぶことによって得られるグラフ $G(A)$ を考えると、$G(A)$ が perfect か?

max　　　min　$x_1 + x_2 + 3x_3$

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$